Rayonnement d'une antenne demi-onde.

Une antenne est un conducteur filiforme rectiligne (sur l'axe Oz), de longueur a finie (et centré sur le point O), parcouru par un courant sinusoïdal de la forme $I(z,t) = f(z)\,\cos\omega\,t$.

Question 1 :

Peut-on se placer dans l'hypothèse du régime quasi-stationnaire ? Que peut-on dire de l'intensité aux extrémités de l'antenne ? Montrer que $f(z) = I_0\,\cos(\pi\,z/a)$ ***vérifie ces conditions aux limites. Expliquer la dénomination «antenne demi-onde». L'antenne peut-elle être assimilée à un dipôle oscillant ? En admettant, car une justification rigoureuse nous mènerait bien trop loin, que*** $I(z,t)$ ***vérifie l'équation de d'Alembert dans le vide, en déduire la valeur de la pulsation.***

Si l'on était dans l'hypothèse du régime quasi-stationnaire, le courant serait uniforme dans le fil et ce n'est pas le cas.

Bien évidemment, l'intensité doit s'annuler aux extrémités sinon il y aurait accumulation de charges, impossible en l'absence de condensateur. La fonction $f(z)$ doit s'annuler aux extrémités, on peut donc proposer une analogie avec les cordes vibrantes et affirmer que $f(z)$ est décomposable en fondamental et harmoniques. Le fondamental est tel que la longueur de l'antenne soit une demi-longueur d'onde (d'où le nom de l'antenne) et $f(z)$, de période $2\,a$, s'écrit alors $f(z) = I_0\,\cos(\pi\,z/a)$ pour s'annuler en $z = \pm a/2$.

Par essence, la taille de l'antenne n'est pas négligeable devant la longueur d'onde (c'en est la moitié) et l'on ne peut donc pas reprendre les résultats du cours pour trouver le champ rayonné.

On reporte $I(z,t) = I_0\,\cos(\pi\,z/a)\,\cos\omega\,t$ dans

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

et l'on tire sans peine que $\omega = \pi\,c/a$

Question 2 :

On isole par la pensée une portion MM' ***de l'antenne entre*** z ***et*** $z + \mathrm{d}z$ ***avec*** $\mathrm{d}z \ll \lambda$***. Montrer que l'on doit considérer qu'existe en*** M ***et*** M' ***des charges fictives opposées dont on calculera l'expression. En déduire que cette portion d'antenne se comporte comme un dipôle oscillant dont on précisera le moment.***

Pendant un temps $\mathrm{d}t$ le courant $I(z,t)$ qui circule de M (cote z) à M' (cote $z + \mathrm{d}z$) transporte une charge $\mathrm{d}q = I\,\mathrm{d}t$ qui est prélevée en M et apportée en M'. Il y a donc apparition de charges q en M' et $-q$ en M avec $\mathrm{d}q = I\,\mathrm{d}t$; donc

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I(z,t) = I_0\,\cos(\pi\,z/a)\,\cos\omega\,t$$

$$\text{d'où}\quad q(z,t) = \frac{I_0}{\omega}\,\cos(\pi\,z/a)\,\sin\omega\,t$$

Ce couple de charges q en M' et $-q$ en M est un dipôle de moment élémentaire

$$\mathrm{d}\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{MM'} = q\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z} = \frac{I_0}{\omega}\,\cos(\pi\,z/a)\,\sin\omega\,t\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$$

que l'on note $\mathrm{d}p(z,t)\,\overrightarrow{e_z}$

Question 3 :
Calculer, en reprenant les formules du cours, le champ électromagnétique élémentaire créé par cette portion d'antenne en un point P très éloigné dans une direction faisant l'angle θ avec Oz.

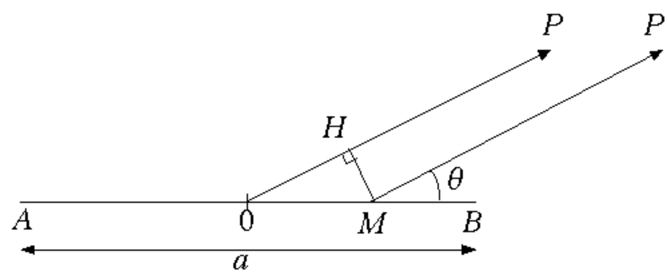
On appelle r_M la distance $\|\overrightarrow{MP}\|$, $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans le plan méridien contenant Oz et P et enfin $\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$. Les formules du cours où l'on remplace $p(t)$ par $\mathrm{d}p(z,t)$ donnent :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{E}(P,t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r_M}\mathrm{d}\ddot{p}(z, t - r_M/\mathrm{c})\,\overrightarrow{e_\theta} = -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r_M}\omega^2\,\mathrm{d}p(z, t - r_M/\mathrm{c})\,\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\mathrm{d}\overrightarrow{B}(P,t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi\,c}\frac{\sin\theta}{r_M}\mathrm{d}\ddot{p}(z, t - r_M/\mathrm{c})\,\overrightarrow{e_\varphi} = -\frac{\mu_0}{4\,\pi\,c}\frac{\sin\theta}{r_M}\omega^2\,\mathrm{d}p(z, t - r_M/\mathrm{c})\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Question 4 :
Pour un point P très éloigné dans une direction faisant l'angle θ avec Oz, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ dépendent-ils de la position du point M sur l'antenne ? Même question pour la distance r_M de cote z ? La variation de r_M avec z est-elle importante ? Nuancez cette dernière réponse !

On peut considérer que P est à l'infini dans la direction θ et dès lors les différents segments MP sont parallèles et la base locale peut être considérée comme indépendante du choix de M. Par contre, r_M dépend de z ; il suffit de penser au théorème de Malus et aux raisonnements habituels en optique physique. On appelle $r = r_O = \|\overrightarrow{OP}\|$ et H la projection de M sur OM ; classiquement

$$r_M = r - \|\overrightarrow{OH}\| = r - z\,\cos\theta$$



La variation entre r et r_M est minime car $z \ll r$ et elle est effectivement négligeable dans le terme en $1/r_M$ mais ce n'est plus vrai dans le terme sinusoïdal car dans celui-ci ce n'est pas la valeur de r_M qui compte mais le reste de la division par λ qui va donc varier entre O et M de $z\,\cos\theta/\lambda$ ce qui n'est pas du tout négligeable puisque $z \sim a = \lambda/2$

Question 5 :
En déduire, sous forme intégrale, les champs créés par l'antenne. Le calcul de l'intégrale pourra être effectué par un logiciel de calcul formel ou son résultat admis.

Procédons avec calme et méthode. Le cours donne (cf supra)

$$\mathrm{d}\overrightarrow{E}(P,t) = -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r_M}\omega^2\,\mathrm{d}p(z, t - r_M/\mathrm{c})\,\overrightarrow{e_\theta}$$

pour $\mathrm{d}\overrightarrow{B}$, on remplace $\overrightarrow{e_\theta}$ par $\overrightarrow{e_\varphi}$ et l'on divise par c, abstenons-nous donc de cette réécriture. On remplace r_M par r dans le terme en $1/r_M$ et par $r - z\,\cos\theta$ dans le terme sinusoïdal

$$\mathrm{d}\overrightarrow{E}(P,t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}\omega^2\,\mathrm{d}p(z, t - r/c + z\,\cos\theta/c)\,\overrightarrow{e_\theta}$$

désormais on notera $t^* = t - r/c$

$$\mathrm{d}E_\theta(P,t) = -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r}\omega^2\,\mathrm{d}p(z, t^* + z\,\cos\theta/c)$$

On y reporte (cf supra)

$$\mathrm{d}p(z,t) = \frac{I_0}{\omega}\,\cos\left(\pi\,z/a\right)\,\sin\,\omega\,t\,\mathrm{d}z$$

d'où

$$\mathrm{d}E_\theta(P,t) = -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r}\omega^2\,\frac{I_0}{\omega}\,\cos\left(\pi\,z/a\right)\,\sin\,\omega\,(t^* + z\,\cos\theta/c)\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}E_\theta(P,t) = -\frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r}\omega\,\cos\left(\pi\,z/a\right)\,\sin\,\omega\,(t^* + z\,\cos\theta/c)\,\mathrm{d}z$$

et il ne reste qu'à intégrer

$$E_\theta(P,t) = -\frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r}\omega\,\int_{-a/2}^{a/2}\cos\left(\pi\,z/a\right)\,\sin\,\omega\,(t^* + z\,\cos\theta/c)\,\mathrm{d}z$$

sans toutefois oublier (cf supra), car cela induit des simplifications, que $\omega = \pi\,c/a$ que je n'écris que là où c'est utile

$$E_\theta(P,t) = -\frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\frac{\sin\theta}{r}\omega\,\int_{-a/2}^{a/2}\cos\left(\pi\,z/a\right)\,\sin\left(\omega\,t^* + \pi\,z\,\cos\theta/a\right)\,\mathrm{d}z$$

Le changement de variable $u = \pi\,z/a$ et quelques lignes de calcul de routine, pourvu que l'on maîtrise sa trigonométrie, donnent pour l'intégrale

$$\int_{-a/2}^{a/2}\cdots = \frac{2\,a}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\,\sin\omega t^*$$

et puisque a et ω sont liés par (cf supra) $\omega = \pi\,c/a$

$$\int_{-a/2}^{a/2}\cdots = \frac{2\,c}{\omega}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\,\sin\omega t^*$$

$$E_\theta(P,t) = -\frac{\mu_0\,c\,I_0}{2\,\pi\,r}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,\sin\omega t^*$$

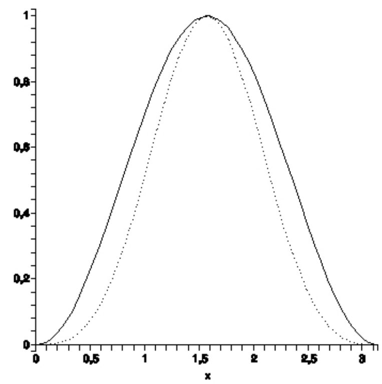
Question 6 :

Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting et comparer sa dépendance en θ par rapport au dipôle rayonnant du cours. En déduire, sous forme intégrale, la moyenne temporelle de la puissance rayonnée. Définir une résistance d'antenne.

On passe de $\overrightarrow{E}$ à $\overrightarrow{B}$ comme expliqué plus haut et au vecteur de Poynting par $\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}/\mu_0$, d'où $\overrightarrow{\Pi} = \Pi\,\overrightarrow{e_r}$ avec $\Pi = E_\theta^2/\mu_0\,c$ et puisque la moyenne temporelle d'un sinus au carré est 1/2,

$$\langle\Pi\rangle = \frac{\mu_0\,c\,I_0^2}{8\,\pi^2\,r^2}\,\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

On trouvera ci-dessous le graphe de la fonction $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$ superposé à celui de $\sin^2\theta$ (en pointillé et pour le dipôle oscillant) : l'antenne est à peine moins directive que le dipôle.



La puissance moyenne rayonnée en est le flux à travers une sphère de rayon r

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \oiint \langle \Pi \rangle \, \mathrm{d}S = \oiint \langle \Pi \rangle \, r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$$

L'intégration sur φ donne $2\,\pi$, les r se simplifient et

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \, c \, I_0^2}{4\,\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

Par analogie avec $\langle \mathcal{P} \rangle = R\,I_{eff}^2 = R\,I_0^2/2$, on peut définir une résistance de rayonnement ou d'antenne égale à

$$R = \frac{\mu_0 \, c}{2\,\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

Il est remarquable que le résultat soit une constante universelle ; la littérature donne pour valeur $73\ \Omega$